Part IIプラズマの不安定性と負のエネルギー

長谷川, 晃

解説

Part II
プラズマの不安定性と負のエネルギー

長谷川　晃（阪大基礎工）

ある閉じた境界の中にある多体系または連続体系が不安定状態となるのは，系のもっている自由エネルギーが何らかの過程で系の集合的（コレクテイヴ）な運動または場のエネルギーに変換されることによるものと考えられる。プラズマの場合，電磁場との相互作用が存在するため，通常の流体や，中性気体の場合に比べ，自由エネルギーの形体の自由度が多くなり，非常に多くの，また複雑な過程による不安定性が存在する。このために，プラズマの不安定性を統一的に眺めることは容易ではない。ここで，エネルギーの立場から，これらの不安定性を統一的に眺めることを試みる。

通常線形的な不安定性は，一次の摂動量が時間的に成長する解をもつことによって知ることができる。したがってこの場合，系の分散特性が重要な役割をはたし，$\exp\ i(kx-\omega t)$ の形の波に対しては分散式（$D(\omega,k)=0$）の零点が複素 ω 面の上半面に存在することが，不安定性の必要十分条件となる。したがって不安定性を統一的に眺めるためには，「$D(\omega,k)$ の零点が ω 面の上半面に存在する」という数学的な命題と，それを引き起す物理的な要因の間の関係を調べなければならない。

さて，プラズマの不安定性に関する研究を歴史的にみると，マイクロ波の増巾に用いられている進行波管の発明（Kompfner－Pierce，1940年代後期）がその最初ではないかと考えられる。この研究の基礎になった考え方は，それよりさらに10年ほど前に出された空間電荷波の存在（Hahn，1939年）に依っている。Hahn はドリフトしているプラズマ（電子ビーム）中には，プラズマ振動（$\omega^2=\omega_p^2$）がドプラーシフトして生ずる進行波（$(\omega-kv_0)^2=\omega_p^2$）が存在し，それには位相速度がビームの速度 v_0 より大きい波，$\omega=kv_0+\omega_p$ と小さい波，$\omega=kv_0-\omega_p$ の2種類のものがあることを示した。Kompfner らはこの中，位相速度の小さい方の波と同期する位相速度をもつ電磁波を電子ビームに重畳させることにより，電磁波が増巾されることを示したわけである。このようにして作られた進行波管は現

在，地上ステーションはもとより，宇宙ステーションにおいてもマイクロ波の中継用増巾管として用いられている。比誘電率が1より大きい物質中に電磁波の位相速度よりも大きい速度をもつ荷電粒子を通過せしめると，その粒子は電磁波を輻射することが1937年にCeronkovによって示されている。Hahnの示した位相速度の遅い波は，正にCerenkov輻射の条件を満しており，しかもほぼ同じ時期に，まったく独立に示されているのは興味深い。しかしHahnの空間電荷波は，プラズマ振動がそうであるように，プラズマの集合的な動きによって作られるもので，Cerenkov効果の重畳によって生ずるものではなく，したがってそれがもつ増巾作用は何か別の機構によるものと解釈しなければならない。

これに対して最も良い解釈を与えたのはChu（1951年）の負の電力の考え方である。Chuはドリフトしている電子ビーム中の一次の摂動量に対してのエネルギー保存式を作り，遅い空間電荷波，$\omega = kv_0 - \omega_p$，が負の平均エネルギーを運んでいることを示した。これはビーム中の一次の摂動電流 I_1 を，ビーム中の等価的な一次の摂動電圧 V_1（これはビーム中の一次の摂動速度に比例する量）の間の位相差が 180° になっているため，$\langle I_1 V_1 \rangle < 0$ となるからである。勿論全体の系のエネルギーは正であるが，一次の摂動量のみについて考えれば，負のエネルギーという考え方は許される。この考え方に従えば上述の"遅い空間電荷波"からエネルギーを取り出すと，この波の振巾は増大することになり，この結果それがもっている増巾作用の説明ができる。とに角，エネルギーを取り去れば，この波の振巾が増大するということから，　ームを単なる抵抗体の中を通すことにより，マイクロ波の増巾を行わしめ得ることも示された。（Birdsall－Whinnery, 1953年）。

ある電気回路を考え，これに電力を供給する場合，よく無効電力とか有効電力とか言った言葉を用いる。もしこの回路が，インダクタンスLや，キャパシタンスCのみによって形成されている場合には，外部から電圧を加えると $\pm 90^\circ$ の位相差のある電流が流れるため，IVの時間平均は零となり電力消費はないが，もし抵抗Rを有しているとV，Iの位相差は $\pm 90^\circ$ 以内となり，ある電力消費が存在する。この時，この位相差を ϕ とすると

IV cosϕ のことを実効電力というわけである。Chuによれば，I，Vの位相差ϕが180°というわけであるから，<IV><0即ち電力はこの回路で消費されるのではなく，外部に供給されることを示している。

さて一次の摂動量について考えているわけであるから，こういった系のもつ電力やエネルギーは，分散特性に密接な関係があると考えられる。定常状態ではIVの時間平均は，Fourier 振巾を用いて，$\frac{1}{2} R_e \bar{I} \bar{V}^*$ と書くことができるから，Fourier 変換された量についてのエネルギー保存式を作ることにより，上記のエネルギーの正負をみわけることが可能である。この場合系のもつ伝達関数，物理的には導電率$\sigma(\omega, k)$または誘電率$\epsilon(\omega, k)$が重要な役割をもつと考えられる。ここで$\sigma(\omega, k)$や$\epsilon(\omega, k)$がどのようにして得られるかを復習してみると，まず適当な電磁場が与えられたとき，プラズマが線形領域でどのような動きをするかを適当な運動方程式を用いて求め，この動きから電流を求め，こうして得られた電流の電場に対する比例係数とし得られたものである。したがってσまたはϵはプラズマの力学的性質を表していると言える。さて上に遅い空間電荷波が負のエネルギーをもっていると述べた。これは，一次の摂動量に対するエネルギー保存式を作ったとき，それを

$$\frac{\partial}{\partial t} W + \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{x}} \underset{\sim}{P} = 0$$

と書くとW<0であることを意味する。一方，σやϵはプラズマの一次の摂動量に対するリアクションを表すから，WやPをσまたはϵで表すことができるはずである。損失が少い場合，WはBers（1963年）によって

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \underset{\sim}{\bar{E}}^* \cdot \frac{\partial (w \epsilon)}{\partial w} \cdot \underset{\sim}{\bar{E}}$$

として表された。例えば先程の電子ビーム中のプラズマ波（空間電荷波）の場合には

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - k v_0)^2}$$

であるから，$\omega = kv_0 - \omega_p$ の波に対して $W < 0$ となることがわかる。これに対して静止しているプラズマの場合には

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

であるから，Wは常に正である。この結果，多くのプラズマ不安定性の要因がこうした負のエネルギーが原因となっていることが知られるようになった。

しかしエネルギーが負でない場合にも不安定が生ずる場合があることがわかり始めた。例えばビームに温度の効果を入れると，上の定義を用いるとビーム速度 v_0 がその熱速度 v_T よりも大きくなければ W は負にならないことがわかるが，それにもかかわらず，$v_0 < v_T$ のビームが，例えばイオン音波と結合すると不安定となることが知られた。つまりこの場合，不安定の要因はビームが負のエネルギーをもっているからではなく，何か他の原因によるものと考えなければならない。

さて，ここで前に「負のエネルギー」をもつ場合には，電圧V_1 と電流I_1 の間の位相差 ϕ が 180° であることを示した。一方通常の回路定数 R, L, C をもつ受動電気回路に外部から電圧を加えると，電流との位相差 ϕ は $|\phi| \leqq 90^\circ$ となることが知られている。今，あるアドミッタンス$Y(i\omega)$をもつ電気回路に電圧Vをかけると

$$\bar{I}(i\omega) = Y(i\omega)\,\bar{V}(i\omega)$$

なる電流が流れる。Vとして時間的に増大する電圧，

$$V = V_0 e^{\alpha t} \cos \omega t, \qquad \alpha \geqq 0$$

を考え，この場合の電流 $I(t)$ を求め，$t = -\infty$からtまでの間に，この回路に消費されたエネルギーを

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{t} I(t)\,V(t)\,dt$$

として計算すると $\alpha \geqq 0$ に対して $\varepsilon \geqq 0$ とすると arc $Y(i\omega)$ 即ち，I, Vの間の位相角 ϕ が $|\phi| \leqq 90^\circ$ を満足することが証明できる。これは，

逆に言えば，もし $\alpha \geqq 0$ に対して $|\phi| > 90°$ となれば $\epsilon < 0$ となり，消費されたエネルギーが負，即ちエネルギーはこの回路から外部に供給されたことになる。この話をプラズマの導電率 $\sigma(\omega, k)$ にあてはめると，$I_m(\omega) \geqq 0$ で $R_e[\sigma(\omega, k)] < 0$ であれば，プラズマの導電率 $\sigma(\omega, k)$ は外部にエネルギーを供給し得る性質をもつことになる。一方，力と速度の間の因果関係，即ち，力が加る前に物質は動き出さないということから $\sigma(\omega, k)$ は $I_m(\omega) \geqq 0$ で解析的であることが示されるから，$\sigma(\omega, k)$ は $I_m(\omega) \geqq 0$ で極値をもたない。即ち $R_e(\sigma)$ が $I_m(\omega) > 0$ 面のどこかで負になるとすれば，それは $I_m(\omega) > 0$ の境界上，即ち $R_e(\omega)$ 軸上ということになる。以上の事実を要約すると，あるプラズマの導電率 $\sigma(\omega, k)$ が，実の ω に対して $R_e(\sigma) < 0$ となる領域をもつと，このプラズマは，一次の摂動のオーダーのエネルギーを外部に供給し得る性質をもつことになる。このような導電率 σ のことを能動的と名付けることにする。（長谷川，１９６８年）

ここでもし $R_e\,\sigma \sim 0$ の場合を考えると

$$R_e(\sigma) = i\,I_m(\omega)\frac{\partial\, i\, I_m(\sigma)}{\partial\omega}$$

$$= -I_m(\omega)\frac{\partial I_m(\sigma)}{\partial\omega}$$

$I_m(\omega) > 0$ に対して $R_e(\sigma) < 0$ とおくと $\partial I_m(\sigma)/\partial\omega > 0$ となる。即ち，Bers の与えた負のエネルギーの条件が得られる。即ち $I_m(\omega) \geqq 0$ に対して $R_e(\sigma) < 0$ という考え方は，従来の負のエネルギーの考え方を含むことになる。これを上述の，電圧・電流の位相差 ϕ で言うならば，$\phi = 180°$ が Bers の負のエネルギーになり，$|\phi| > 90°$ が，今述べた能動的導電率を表わすことになる。

これらの考えから，「プラズマが安定であるための必要十分条件は，プラズマのもつ導電率が受動的，即ち，実の w に対して $R_e[\sigma(\omega, k)] > 0$ または $\partial I_m(\sigma)/\partial\omega < 0$ であることである」という重要な定理が得られる。

この定理の裏を考えると，あるプラズマが一次の摂動に対して負のエネル

ギーをもっていなくとも Re(σ)＜0となるような場合にはプラズマが不安定になり得ることを示している。導電率の実数部が負ということは，しごく常識的な結論ではあるが，上述の説明から，これがいかにエネルギー的な考え方と結びついているかおわかりいただけたことと思う。

実のωに対して Re(σ)＜0なる状態がプラズマのどのような物理的機構によって作られるかを調べてみると，プラズマがドリフトしている場合，例えドリフト速度がその熱速度より小さくとも，もしそれが波の位相速度より大きいと，導電率は能動的になる。即ち前述のイオン音波とビームとの間に生ずる不安定の説明はつく。この他に，磁場が存在すると，プラズマの磁場と垂直方向の密度勾配がある場合，また磁場と垂直方向の速度分布関数が v＝0以外にピークをもつとき，さらに，磁場と垂直方向の温度が平行方向の温度より高い場合などのときに導電率σは能動的となることがわかる。これらの物理的な要因は全てプラズマの不安定につながる可能性をもっているわけである。

参　考　文　献

W.C.Hahn, G.E.Review 48, 258 (1939).

J.R.Pierce, Traveling Wave Tubes, D.Van Nostrand Co., Tnc., N.Y. (1950)

L.J.Chu, IRE Conference on Electron Devices, Durham New Humpshire (1951)

C.K.Birdsall, J.R.Whinnery, J.Appl. Phys. 24, 314 (1953)

A.Bers and S.Gruber, Appl. Phys. Letters 6, 27 (1965)

A.Hasegawa, Phys. Rev., to be published in May 1968.